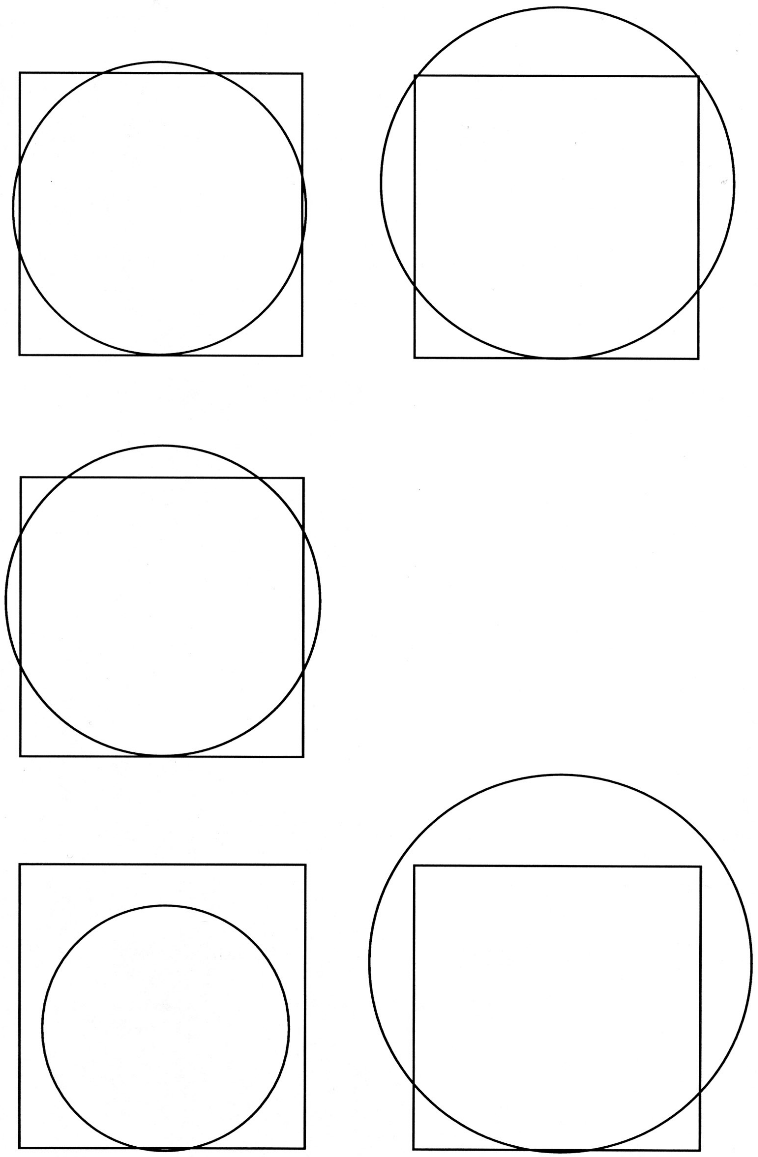


Drei mögliche Startpaare für Leonardos Verfahren zur Quadratur des Kreises und zwei hierfür untaugliche Startpaare.

Mathematischer Anhang

1. Modellierung der Konstruktion durch Gleichungen

Zur Berechnung der im laufenden Text aufgeführten Werte wurden Gleichungen verwendet, die sich allein aus dem Satz des Pythagoras und dem Strahlensatz ergeben.

Mit h ist die Höhe der oberen seitlichen Schnittpunkte eines Quadrates Q_1 mit einem Kreis K_1 bezeichnet. Die Größe h entspricht in der *Proportionsstudie nach Vitruv* (S. 104, 105) der Höhe der Mittelfinger (s. Abb. M1).

$$h = r_1 + \sqrt{r_1^2 - \tfrac{1}{4} \cdot a_1^2}$$

Mit x ist der Radius der Konstruktionskreise hk bezeichnet. Der halbe Abstand k zwischen den beiden äußeren Schnittpunkten der Kreise hk mit der Oberseite von Q_1 entspricht in da Vincis Zeichnung dem halben Abstand zwischen den Mittelfingern auf der Höhe der Oberseite von Q_1 (s. Abb. M2).

$$k' = \sqrt{x^2 - (a_1 - h)^2}$$

$$k = k' + x' = \sqrt{x^2 - (a_1 - h)^2} + \tfrac{1}{2} \cdot a_1 - x$$

Der Radius r_2 des größeren Kreises K_2, der in Leonardos Zeichnung dem eingezeichneten Kreis entspricht, ergibt sich aus:

$$r_2 = \frac{k^2 + a_1^2}{2a_1}$$

Die Kantenlänge a_2 des Quadrats Q_2, welches mit den Strahlen g konstruiert wird (s. Abb. M3), ergibt sich aus:

$$m = \sqrt{r_2^2 + \tfrac{1}{4} \cdot a_1^2}$$

$$a_2 = \frac{r_2(r_2 + m)}{m}$$

Abb. M1

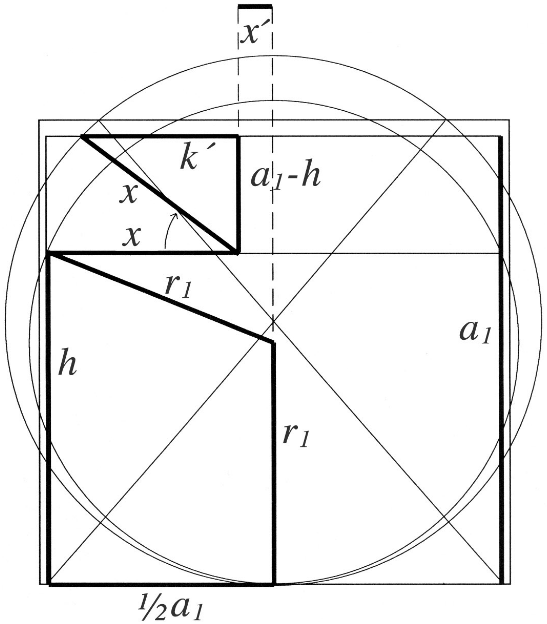


Abb. M2

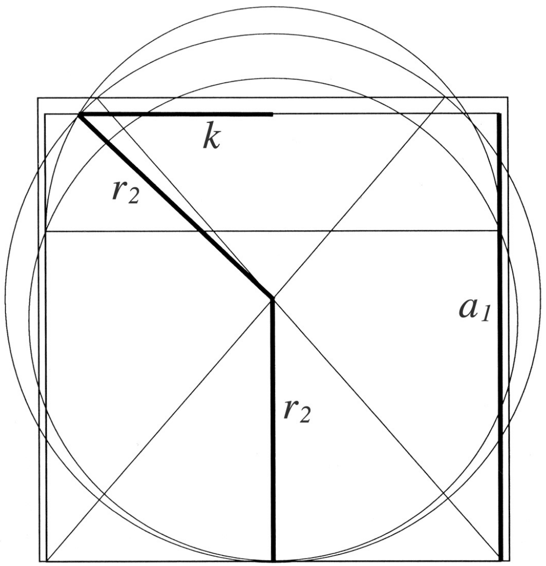
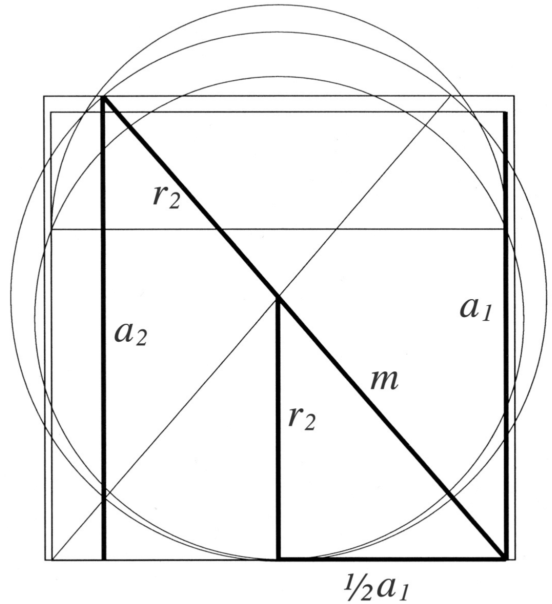


Abb. M3



2. Modellierung und Konvergenztests mittels Javascript

Für die Untersuchung von Leonardos Regelwerk zur Erzeugung einer Folge von Kreisen K_i und Quadraten Q_i mit flächenungleichem Startpaar K_1, Q_1 im Sinne der Konvergenz der Flächenverhältnisse empfiehlt sich die Modellierung der Konstruktion durch ein Computerprogramm.

Im Zuge der dieser Arbeit zugrunde liegenden Untersuchungen wurde der geometrische Algorithmus mit verschiedensten Programmen, wie z.B. Excel oder Derive simuliert. Im folgenden wird die Modellierung durch Javascript dargestellt. Diese Programmiersprache weist zwar ab der siebten Nachkommastelle (in diesem Zusammenhang unwesentliche) Ungenauigkeiten auf, erlaubt es aber jedem Leser, der Zugang zu einem Internetbrowser hat, mit dem nachfolgendem Script selbst zu experimentieren. Das Script (Abb. M4) braucht dabei nicht abgetippt zu werden, sondern steht unter www.klaus-schroeer.com unter „Downloads" zur Verfügung.

Für die Umsetzung als Computerprogramm wurden alle einfachen Variablen *x*, *h*, *k* und *m* zu x_i, h_i, k_i und m_i dimensioniert, da sie natürlich in jeder Generation der Folge andere absolute Werte annehmen. Für den Radi-

Abb. M4

```
                simulation-des-proportionsstudienalgorithmus.html
<html><head><title>Simulation des Proportionsstudienalgorithmus</title>

<script type="text/javascript">

var j = 10;   // Definition der zu berechnenden Generationen

var x = new Array();
var a = new Array();
var r = new Array();
var FQ = new Array();
var FK = new Array();
var f = new Array();
var h = new Array();
var k = new Array();
var m = new Array();

a[1] = 1;     // Die Seite des Startquadrates wird als 1 definiert
x[1] = 0.436; // Definition von x im Verhältnis zur Quadratseite
f[1] = 0.7980148;   // Das Flächenverhältnis des Startpaares wird definiert

r[1] = Math.sqrt(f[1]/Math.PI);

document.write("<dt>Radius der Armkreise hk: x = " + x[1] + "<\/dt>");

for (var i = 1; i < j+1; i++) {

  FK[i] = Math.PI*Math.pow(r[i],2);
  FQ[i] = Math.pow(a[i],2);
  f[i] = FK[i]/FQ[i];

  h[i] = r[i]+Math.sqrt(Math.pow(r[i],2)-Math.pow(.5*a[i],2));
  k[i] = Math.sqrt(Math.pow(x[i],2)-Math.pow(a[i]-h[i],2))+.5*a[i]-x[i];
  r[i+1] = (Math.pow(k[i],2)+Math.pow(a[i],2))/(2*a[i]);
  m[i] = Math.sqrt(Math.pow(r[i+1],2)+Math.pow(.5*a[i],2));
  a[i+1] = r[i+1]*(r[i+1]+m[i])/m[i];

  x[i+1] = x[1]*a[i+1];

  document.write("<dl><dt>Generation " + (i) + "<\/dt>");
  document.write("<dt>Radius Kreis " + i + ": r(" + (i) + ") = " + r[i] +
"<\/dt>");
  document.write("<dt>Seite Quadrat " + i + ": a(" + (i) + ") = " + a[i] +
"<\/dt>");
  document.write("<dt>Fläche Kreis " + i + ": FK(" + (i) + ") = " + FK[i] +
"<\/dt>");
  document.write("<dt>Fläche Quadrat " + i + ": FQ(" + (i) + ") = " + FQ[i] +
"<\/dt>");
  document.write("<dt>Flächenverhältnis " + i + ": f(" + (i) + ") = " + f[i] +
"<\/dt>");
  document.write("<\/dl>");

}

</script>

</head><body>
</body></html>
```

Javascript zur numerischen Simulation des Quadraturverfahrens aus Leonardos *Proportionsstudie nach Vitruv*.

Abb. M5

```
Radius der Armkreise hk: x = 0.436

Generation 1
Radius Kreis 1: r(1) = 0.6000000118590789
Seite Quadrat 1: a(1) = 1
Fläche Kreis 1: FK(1) = 1.1309734000000002
Fläche Quadrat 1: FQ(1) = 1
Flächenverhältnis 1: f(1) = 1.1309734000000002

Generation 2
Radius Kreis 2: r(2) = 0.6223201093691615
Seite Quadrat 2: a(2) = 1.1074541343853646
Fläche Kreis 2: FK(2) = 1.2166832867441324
Fläche Quadrat 2: FQ(2) = 1.226454659767237
Flächenverhältnis 2: f(2) = 0.9920328297949808

Generation 3
Radius Kreis 3: r(3) = 0.6710899988494367
Seite Quadrat 3: a(3) = 1.188721425401127
Fläche Kreis 3: FK(3) = 1.4148532801010774
Fläche Quadrat 3: FQ(3) = 1.4130586272076868
Flächenverhältnis 3: f(3) = 1.0012700484317036

Generation 4
Radius Kreis 4: r(4) = 0.7223633092039852
Seite Quadrat 4: a(4) = 1.2801769298559162
Fläche Kreis 4: FK(4) = 1.6393105370998196
Fläche Quadrat 4: FQ(4) = 1.6388529717353195
Flächenverhältnis 4: f(4) = 1.0002791985445867

Generation 5
Radius Kreis 5: r(5) = 0.7777115569579645
Seite Quadrat 5: a(5) = 1.3781945295741955
Fläche Kreis 5: FK(5) = 1.9001460277509323
Fläche Quadrat 5: FQ(5) = 1.8994201613482382
Flächenverhältnis 5: f(5) = 1.00038215157313

Generation 6
Radius Kreis 6: r(6) = 0.8372830894394018
Seite Quadrat 6: a(6) = 1.4837701124056557
Fläche Kreis 6: FK(6) = 2.202391450249868
Fläche Quadrat 6: FQ(6) = 2.2015737464682923
Flächenverhältnis 6: f(6) = 1.0003714178472956

Generation 7
Radius Kreis 7: r(7) = 0.9014196828846691
Seite Quadrat 7: a(7) = 1.597427265910282
Fläche Kreis 7: FK(7) = 2.5527244988637596
Fläche Quadrat 7: FQ(7) = 2.5517738698735988
Flächenverhältnis 7: f(7) = 1.000372536532874

Generation 8
Radius Kreis 8: r(8) = 0.9704689724885466
Seite Quadrat 8: a(8) = 1.7197912550064625
Fläche Kreis 8: FK(8) = 2.9587834605274517
Fläche Quadrat 8: FQ(8) = 2.957681960796703
Flächenverhältnis 8: f(8) = 1.0003724199374202

Generation 9
Radius Kreis 9: r(9) = 1.0448075040055897
Seite Quadrat 9: a(9) = 1.8515283317431388
Fläche Kreis 9: FK(9) = 3.4294339189832526
Fläche Quadrat 9: FQ(9) = 3.4281571632475307
Flächenverhältnis 9: f(9) = 1.0003724320895815

Generation 10
Radius Kreis 10: r(10) = 1.1248404108421877
Seite Quadrat 10: a(10) = 1.9933565586940738
Fläche Kreis 10: FK(10) = 3.974950212928865
Fläche Quadrat 10: FQ(10) = 3.9734703700886804
Flächenverhältnis 10: f(10) = 1.0003724308230217
```

```
Radius der Armkreise hk: x = 0.436

Generation 1
Radius Kreis 1: r(1) = 0.5040000001597028
Seite Quadrat 1: a(1) = 1
Fläche Kreis 1: FK(1) = 0.7980147999999998
Fläche Quadrat 1: FQ(1) = 1
Flächenverhältnis 1: f(1) = 0.7980147999999998

Generation 2
Radius Kreis 2: r(2) = 0.5069761339853796
Seite Quadrat 2: a(2) = 0.8679372570692345
Fläche Kreis 2: FK(2) = 0.8074672248236632
Fläche Quadrat 2: FQ(2) = 0.7533150822088664
Flächenverhältnis 2: f(2) = 1.0718851167243488

Generation 3
Radius Kreis 3: r(3) = 0.5359893020144542
Seite Quadrat 3: a(3) = 0.9525566703759982
Fläche Kreis 3: FK(3) = 0.9025309748251582
Fläche Quadrat 3: FQ(3) = 0.9073642102778081
Flächenverhältnis 3: f(3) = 0.9946733236798373

Generation 4
Radius Kreis 4: r(4) = 0.5777010435384132
Seite Quadrat 4: a(4) = 1.023447274276301
Fläche Kreis 4: FK(4) = 1.0484704063281043
Fläche Quadrat 4: FQ(4) = 1.0474443232235902
Flächenverhältnis 4: f(4) = 1.000979606344475

Generation 5
Radius Kreis 5: r(5) = 0.6218761782909452
Seite Quadrat 5: a(5) = 1.1020764065833515
Fläche Kreis 5: FK(5) = 1.2149480676275801
Fläche Quadrat 5: FQ(5) = 1.2145724059476726
Flächenverhältnis 5: f(5) = 1.0003092954179331

Generation 6
Radius Kreis 6: r(6) = 0.6695208918878741
Seite Quadrat 6: a(6) = 1.1864700606947922
Fläche Kreis 6: FK(6) = 1.408244745548092
Fläche Quadrat 6: FQ(6) = 1.407711204925104
Flächenverhältnis 6: f(6) = 1.0003790128409302

Generation 7
Radius Kreis 7: r(7) = 0.7208056435589627
Seite Quadrat 7: a(7) = 1.2773573351652896
Fläche Kreis 7: FK(7) = 1.6322483163041264
Fläche Quadrat 7: FQ(7) = 1.63164176170057
Flächenverhältnis 7: f(7) = 1.0003717449612985

Generation 8
Radius Kreis 8: r(8) = 0.7760199143275115
Seite Quadrat 8: a(8) = 1.3752033760713163
Fläche Kreis 8: FK(8) = 1.8918887963321591
Fläche Quadrat 8: FQ(8) = 1.8911843255579461
Flächenverhältnis 8: f(8) = 1.0003725024391819

Generation 9
Radius Kreis 9: r(9) = 0.835463512078388
Seite Quadrat 9: a(9) = 1.480544850097711
Fläche Kreis 9: FK(9) = 2.1928294103040615
Fläche Quadrat 9: FQ(9) = 2.1920130531508533
Flächenverhältnis 9: f(9) = 1.000372423490834

Generation 10
Radius Kreis 10: r(10) = 0.89946054006451
Seite Quadrat 10: a(10) = 1.5939555058113275
Fläche Kreis 10: FK(10) = 2.5416403895982365
Fläche Quadrat 10: FQ(10) = 2.540694154506245
Flächenverhältnis 10: f(10) = 1.0003724317192266
```

```
Radius der Armkreise hk: x = 0.436

Generation 1
Radius Kreis 1: r(1) = 0.6249999922820005
Seite Quadrat 1: a(1) = 1
Fläche Kreis 1: FK(1) = 1.2271846000000002
Fläche Quadrat 1: FQ(1) = 1
Flächenverhältnis 1: f(1) = 1.2271846000000002

Generation 2
Radius Kreis 2: r(2) = 0.6249999999999998
Seite Quadrat 2: a(2) = 1.1130430059018934
Fläche Kreis 2: FK(2) = 1.227184630308512
Fläche Quadrat 2: FQ(2) = 1.2388647329871223
Flächenverhältnis 2: f(2) = 0.9905719306009726

Generation 3
Radius Kreis 3: r(3) = 0.6741651707635402
Seite Quadrat 3: a(3) = 1.1940712366761022
Fläche Kreis 3: FK(3) = 1.4278497062080184
Fläche Quadrat 3: FQ(3) = 1.425806118257196
Flächenverhältnis 3: f(3) = 1.0014332860019708

Generation 4
Radius Kreis 4: r(4) = 0.725649107355397
Seite Quadrat 4: a(4) = 1.286010897355651
Fläche Kreis 4: FK(4) = 1.6542578470266152
Fläche Quadrat 4: FQ(4) = 1.6538240281174867
Flächenverhältnis 4: f(4) = 1.0002623126171544

Generation 5
Radius Kreis 5: r(5) = 0.7812518020601076
Seite Quadrat 5: a(5) = 1.3844670332241544
Fläche Kreis 5: FK(5) = 1.9174848307091212
Fläche Quadrat 5: FQ(5) = 1.9167489660844919
Flächenverhältnis 5: f(5) = 1.000383912884603

Generation 6
Radius Kreis 6: r(6) = 0.8410942101197315
Seite Quadrat 6: a(6) = 1.4905240305586145
Fläche Kreis 6: FK(6) = 2.222486642744306
Fläche Quadrat 6: FQ(6) = 2.2216618856726975
Flächenverhältnis 6: f(6) = 1.0003712342894873

Generation 7
Radius Kreis 7: r(7) = 0.9055227725005004
Seite Quadrat 7: a(7) = 1.6046984332915744
Fläche Kreis 7: FK(7) = 2.5760164139028507
Fläche Quadrat 7: FQ(7) = 2.575057061808433
Flächenverhältnis 7: f(7) = 1.0003725556643563

Generation 8
Radius Kreis 8: r(8) = 0.9748863574355198
Seite Quadrat 8: a(8) = 1.7276194101439228
Fläche Kreis 8: FK(8) = 2.9857803705321846
Fläche Quadrat 8: FQ(8) = 2.9846688263060357
Flächenverhältnis 8: f(8) = 1.0003724179434421

Generation 9
Radius Kreis 9: r(9) = 1.0495632638344157
Seite Quadrat 9: a(9) = 1.859956127127862
Fläche Kreis 9: FK(9) = 3.4607252008337004
Fläche Quadrat 9: FQ(9) = 3.4594367948404754
Flächenverhältnis 9: f(9) = 1.0003724322974037

Generation 10
Radius Kreis 10: r(10) = 1.1299604647939687
Seite Quadrat 10: a(10) = 2.0024299286154066
Fläche Kreis 10: FK(10) = 4.011218964340231
Fläche Quadrat 10: FQ(10) = 4.009725619014702
Flächenverhältnis 10: f(10) = 1.0003724308013615
```

Konvergenztests des Javascripts für drei verschiedene Ausgangswerte für das Flächenverhältnis f_1 des Startpaares Kreis und Quadrat (vergl. S. 101).

us des Armkreises wurde (zunächst) der der Zeichnung entnommene Wert x bzw. $x_1 = 0.436$ (in Bezug auf die Seitenlänge des Ausgangsquadrates Q_1) eingesetzt. Die Seitenlänge des Quadrates des Ausgangspaares a_1 wurde als 1 definiert. Aus dem vorgegebenen Wert für das Flächenverhältnis f_1 des Startpaares Kreis K_1 zu Quadrat Q_1 (im Listing des Scriptes ist hierfür beispielhaft der Wert 0.7980148 gesetzt) wurde rückwirkend der Radius r_1 des Startkreises bestimmt, der für dieses Flächenverhältnis sorgt.

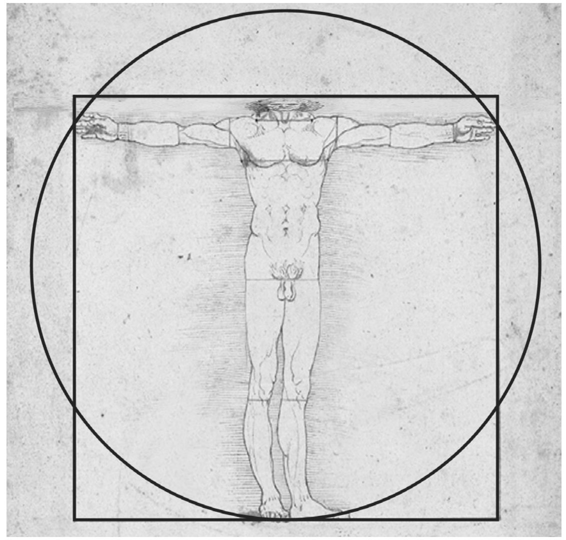
Das Script berechnet dann in einer Schleife (deren Länge durch die Variable j definiert ist) die ersten 10 Generationen der Folge von Kreisen und Quadraten und deren jeweiliges Flächenverhältnis f_i.

Für die drei Flächenverhältnisse $f_1 = FK_1/FQ_1$ des Startpaares, die wir beispielhaft auf S. 101 aufgeführt hatten, ist die jeweilige Ergebnisausgabe des Scriptes in Abbildung M5 aufgeführt. Wie zu sehen ist, konvergiert das Flächenverhältnis in allen Fällen gegen einen Wert von ca. 1.00037. Hunderte von Durchläufen mit anderen Werten für das Flächenverhältnis des Startpaares (innerhalb des Intervalls [0.7980148, 1.2271846] für f_1, in dem die Konstruktion noch ausgeführt werden kann) erbrachten das gleiche Ergebnis.

Die Konvergenz der Folge von Flächenverhältnissen f_i ist somit augenscheinlich klar. Tatsächlich ließ sie sich aber bis zum heutigen Tage nicht theoretisch beweisen. Dies liegt am rekursiven Charakter der Folge, der enormen Verschachtelung von Wurzeln, die man erhält, wenn man sie mit nur einer Gleichung beschreibt und letztlich daran, daß man eine zusätzliche Variable in Form des Flächenverhältnisses des Startpaares hat. Diese drei Eigenheiten des Algorithmus bieten den herkömmlichen Konvergenzkriterien der Mathematik zu wenig Angriffsfläche. Es läßt sich allerdings eine notwendige Bedingung dafür beweisen, daß Leonardos Folge eine sogenannte Cauchy-Folge ist (und damit konvergiert, siehe Abschnitt 4). Aber das ist leider nicht hinreichend. Selbstverständlich wurden die numerischen Simulationen von unabhängiger Seite nachvollzogen und an der Konvergenz wurde keinerlei Zweifel erhoben.

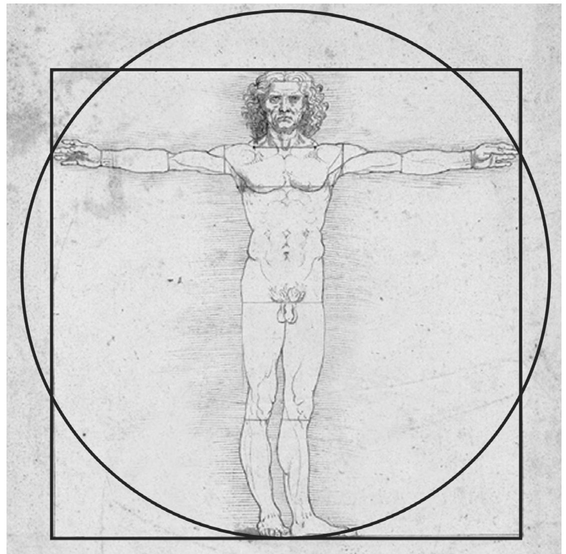
Vielmehr sorgte die Genauigkeit und auch die hohe Konvergenzgeschwindigkeit für großes Erstaunen. Letztere läßt sich besonders gut mit Hilfe der Zeichnung selbst illustrieren. In den Abbildungen M6 a und b sind die ersten beiden Generationen Kreis und Quadrat bei einem Flächenverhältnis für das Startpaar von 1.1309 (a) zu sehen. Schon nach einmaliger Anwendung der Konstruktion verbessert sich das Flächenverhältnis auf 0.9920 (b). Dabei wurde jeweils ein den Proportionen des jeweiligen Paares verzerrter *Homo ad quadratum* eingesetzt. Wie ersichtlich ist, reparieren sich auch die Proportionen der Figur dank des Verfahrens in nur einem Schritt von selbst!

Abb. M6 a und b



Die starke Flächenungleichheit des Ausgangspaares wird durch den deutlich verzerrten *Homo ad quadratum* verdeutlicht (die anderen Elemente aus Leonardos Zeichnung wurden hier im Sinne der Übersichtlichkeit wegretuschiert).

Generation 1
Radius Kreis 1: r(1) = 0.6000000118590789
Seite Quadrat 1: a(1) = 1
Fläche Kreis 1: FK(1) = 1.1309734000000002
Fläche Quadrat 1: FQ(1) = 1
Flächenverhältnis 1: f(1) = 1.1309734000000002



Das Paar der zweiten Generation hat nicht nur sein Flächenverhältnis deutlich angeglichen, sondern ist absolut auch etwas größer als das Ausgangspaar. Der *Homo ad quadratum* läßt sich bereits unverzerrt aus der Leonardos *Proportionsstudie* einsetzen.

Generation 2
Radius Kreis 2: r(2) = 0.6223201093691615
Seite Quadrat 2: a(2) = 1.1074541343853646
Fläche Kreis 2: FK(2) = 1.2166832867441324
Fläche Quadrat 2: FQ(2) = 1.226454659767237
Flächenverhältnis 2: f(2) = 0.9920328297949808

Illustration der Konvergenzgeschwindigkeit anhand der ersten beiden Generationen Kreis und Quadrat bei einem Flächenverhältnis des Startpaares von 1.1309.

3. Konvergenzverhalten bei anderen Werten für x

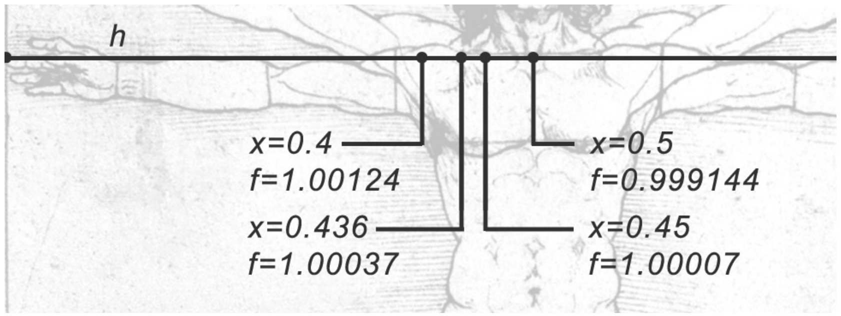
Der Radius x (bzw. x_1) der Konstruktionskreise wurde im laufenden Text und bei den bisherigen Berechnungen durch die Messung stets auf 0.436 festgelegt. Stets konvergierten die Flächenverhältnisse der so erzeugten Folgen von Kreisen und Quadraten gegen 1.00037.

Um sicher zu gehen, daß man dieses für seine Zeit hervorragende Resultat nicht nur mit dem gemessenen Abstand d der beiden Mittelpunkte der Konstruktionskreise erhält, haben wir das Verfahren mit anderen Werten für x getestet.

Es ergab sich, daß die Mittelpunkte der Konstruktionskreise *hk*, sofern sie auf *h* liegen, zumindest im Brustbereich der Figur beliebig (symmetrisch) angeordnet werden können, ohne daß ein nennenswert schlechteres Ergebnis herauskommen würde. Zum Teil wird es sogar besser (siehe unten und S. 122-125).

Abb. M7 zeigt neben dem gemessenen Wert für x drei alternative Werte auf der Linie h zusammen mit den daraus resultierenden Flächenverhältnissen. Abb. M8 zeigt die jeweiligen Ergebnisse der numerischen Simulation über das entsprechend abgeänderte Javascript. Auch diese Simulationen wurden für wesentlich mehr Werte vollzogen (siehe hierzu auch S. 137). Dabei ergab sich, daß der Verlauf des resultierenden Flächenverhältnisses f in Anhängigkeit zu x im Bereich der Brust allem Anschein nach stetig und differenzierbar ist und f etwa bei x = 0.45 den Wert 1 durchläuft. Anders formuliert, scheint es in unmittelbarer Nähe der von Leonardo gewählten Mittelpunkte solche zu geben, für die das Flächenverhältnis 1 wird.

Abb. M7



Verschiedene Werte für x und die daraus entstehenden Flächenverhältnisse f im Zustand der Konvergenz auf der *Proportionsstudie nach Vitruv*.

Abb. M8

Radius der Armkreise hk: x = 0.4

Generation 1
Radius Kreis 1: r(1) = 0.6000000118590789
Seite Quadrat 1: a(1) = 1
Fläche Kreis 1: FK(1) = 1.1309734000000002
Fläche Quadrat 1: FQ(1) = 1
Flächenverhältnis 1: f(1) = 1.1309734000000002

Generation 2
Radius Kreis 2: r(2) = 0.6220769194693622
Seite Quadrat 2: a(2) = 1.1069469960102125
Fläche Kreis 2: FK(2) = 1.2157325629309892
Fläche Quadrat 2: FQ(2) = 1.2253316519760333
Flächenverhältnis 2: f(2) = 0.9921661298558931

Generation 3
Radius Kreis 3: r(3) = 0.6687943447215587
Seite Quadrat 3: a(3) = 1.1840340527914943
Fläche Kreis 3: FK(3) = 1.405190020624362
Fläche Quadrat 3: FQ(3) = 1.4019366381698513
Flächenverhältnis 3: f(3) = 1.0023206344466165

Generation 4
Radius Kreis 4: r(4) = 0.7178046028584452
Seite Quadrat 4: a(4) = 1.2715649372794415
Fläche Kreis 4: FK(4) = 1.6186850306850693
Fläche Quadrat 4: FQ(4) = 1.61687738971847
Flächenverhältnis 4: f(4) = 1.0011179827104355

Generation 5
Radius Kreis 5: r(5) = 0.7705689666848295
Seite Quadrat 5: a(5) = 1.3649413946944637
Fläche Kreis 5: FK(5) = 1.8654039921175496
Fläche Quadrat 5: FQ(5) = 1.8630650109504678
Flächenverhältnis 5: f(5) = 1.0012554479598585

Generation 6
Radius Kreis 6: r(6) = 0.827192099606658
Seite Quadrat 6: a(6) = 1.4652518897038944
Fläche Kreis 6: FK(6) = 2.1496246247802375
Fläche Quadrat 6: FQ(6) = 2.1469631002808334
Flächenverhältnis 6: f(6) = 1.0012396694191232

Generation 7
Radius Kreis 7: r(7) = 0.8879784724167019
Seite Quadrat 7: a(7) = 1.5729247887528603
Fläche Kreis 7: FK(7) = 2.4771639264142107
Fläche Quadrat 7: FQ(7) = 2.4740923910732304
Flächenverhältnis 7: f(7) = 1.0012414796440354

Generation 8
Radius Kreis 8: r(8) = 0.9532314425554441
Seite Quadrat 8: a(8) = 1.688511115414734
Fläche Kreis 8: FK(8) = 2.854608739835628
Fläche Quadrat 8: FQ(8) = 2.8510697868791093
Flächenverhältnis 8: f(8) = 1.0012412719509025

Generation 9
Radius Kreis 9: r(9) = 1.0232795548951528
Seite Quadrat 9: a(9) = 1.812591155642542
Fläche Kreis 9: FK(9) = 3.2895649582866886
Fläche Quadrat 9: FQ(9) = 3.285486697513566
Flächenverhältnis 9: f(9) = 1.001241295780077

Generation 10
Radius Kreis 10: r(10) = 1.0984751408376676
Seite Quadrat 10: a(10) = 1.9457892207159253
Fläche Kreis 10: FK(10) = 3.790795345707927
Fläche Quadrat 10: FQ(10) = 3.786095691454288
Flächenverhältnis 10: f(10) = 1.0012412930460914

Radius der Armkreise hk: x = 0.45

Generation 1
Radius Kreis 1: r(1) = 0.6000000118590789
Seite Quadrat 1: a(1) = 1
Fläche Kreis 1: FK(1) = 1.1309734000000002
Fläche Quadrat 1: FQ(1) = 1
Flächenverhältnis 1: f(1) = 1.1309734000000002

Generation 2
Radius Kreis 2: r(2) = 0.622404035449533
Seite Quadrat 2: a(2) = 1.1076291516309786
Fläche Kreis 2: FK(2) = 1.2170114726508625
Fläche Quadrat 2: FQ(2) = 1.2268423375427615
Flächenverhältnis 2: f(2) = 0.9919868555306062

Generation 3
Radius Kreis 3: r(3) = 0.6718757711755062
Seite Quadrat 3: a(3) = 1.1903256722543598
Fläche Kreis 3: FK(3) = 1.4181684939312098
Fläche Quadrat 3: FQ(3) = 1.4168752060277936
Flächenverhältnis 3: f(3) = 1.0009127747439677

Generation 4
Radius Kreis 4: r(4) = 0.7239356034528902
Seite Quadrat 4: a(4) = 1.2831496156179885
Fläche Kreis 4: FK(4) = 1.6464545422384316
Fläche Quadrat 4: FQ(4) = 1.6464729360605916
Flächenverhältnis 4: f(4) = 0.9999888283483092

Generation 5
Radius Kreis 5: r(5) = 0.7801836779428496
Seite Quadrat 5: a(5) = 1.3827831606814247
Fläche Kreis 5: FK(5) = 1.9122452608241618
Fläche Quadrat 5: FQ(5) = 1.9120892694641107
Flächenverhältnis 5: f(5) = 1.0000815816303885

Generation 6
Radius Kreis 6: r(6) = 0.8407854368381887
Seite Quadrat 6: a(6) = 1.490199559690292
Fläche Kreis 6: FK(6) = 2.220855152425305
Fläche Quadrat 6: FQ(6) = 2.22069472770114
Flächenverhältnis 6: f(6) = 1.0000722407822038

Generation 7
Radius Kreis 7: r(7) = 0.9060963227144765
Seite Quadrat 7: a(7) = 1.605955154725938
Fläche Kreis 7: FK(7) = 2.5792806999486313
Fläche Quadrat 7: FQ(7) = 2.5790919589908117
Flächenverhältnis 7: f(7) = 1.000073181166403

Generation 8
Radius Kreis 8: r(8) = 0.9764802589496707
Seite Quadrat 8: a(8) = 1.7307029509614924
Fläche Kreis 8: FK(8) = 2.995551622822866
Fläche Quadrat 8: FQ(8) = 2.995332704466818
Flächenverhältnis 8: f(8) = 1.0000730864907665

Generation 9
Radius Kreis 9: r(9) = 1.0523315143241145
Seite Quadrat 9: a(9) = 1.8651408790488655
Fläche Kreis 9: FK(9) = 3.479004781523736
Fläche Quadrat 9: FQ(9) = 3.4787504986991746
Flächenverhältnis 9: f(9) = 1.000073096022453

Generation 10
Radius Kreis 10: r(10) = 1.1340747584346111
Seite Quadrat 10: a(10) = 2.0100217128128435
Fläche Kreis 10: FK(10) = 4.040482603722583
Fläche Quadrat 10: FQ(10) = 4.040187285979077
Flächenverhältnis 10: f(10) = 1.000073095062828

Radius der Armkreise hk: x = 0.5

Generation 1
Radius Kreis 1: r(1) = 0.6000000118590789
Seite Quadrat 1: a(1) = 1
Fläche Kreis 1: FK(1) = 1.1309734000000002
Fläche Quadrat 1: FQ(1) = 1
Flächenverhältnis 1: f(1) = 1.1309734000000002

Generation 2
Radius Kreis 2: r(2) = 0.6226649938907405
Seite Quadrat 2: a(2) = 1.1081733514185557
Fläche Kreis 2: FK(2) = 1.218032211519478
Fläche Quadrat 2: FQ(2) = 1.2280481767942337
Flächenverhältnis 2: f(2) = 0.9918439964620102

Generation 3
Radius Kreis 3: r(3) = 0.6743013457219825
Seite Quadrat 3: a(3) = 1.1952773086178736
Fläche Kreis 3: FK(3) = 1.4284265886103993
Fläche Quadrat 3: FQ(3) = 1.4286878444967874
Flächenverhältnis 3: f(3) = 0.9998171357813433

Generation 4
Radius Kreis 4: r(4) = 0.7288267490653214
Seite Quadrat 4: a(4) = 1.2924047259578726
Fläche Kreis 4: FK(4) = 1.6687776698409524
Fläche Quadrat 4: FQ(4) = 1.6703099756782438
Flächenverhältnis 4: f(4) = 0.9990826218728238

Generation 5
Radius Kreis 5: r(5) = 0.7879025965859594
Seite Quadrat 5: a(5) = 1.397115953336048
Fläche Kreis 5: FK(5) = 1.9502708795807098
Fläche Quadrat 5: FQ(5) = 1.9519329870660942
Flächenverhältnis 5: f(5) = 0.9991484812765613

Generation 6
Radius Kreis 6: r(6) = 0.8517532181909486
Seite Quadrat 6: a(6) = 1.510340922804108
Fläche Kreis 6: FK(6) = 2.2791737743255225
Fläche Quadrat 6: FQ(6) = 2.2811297030967648
Flächenverhältnis 6: f(6) = 0.9991425613508136

Generation 7
Radius Kreis 7: r(7) = 0.9207795425677272
Seite Quadrat 7: a(7) = 1.6327389484106725
Fläche Kreis 7: FK(7) = 2.6635521006774416
Fläche Quadrat 7: FQ(7) = 2.6658364736571887
Flächenverhältnis 7: f(7) = 0.999143093358381

Generation 8
Radius Kreis 8: r(8) = 0.9953996508203304
Seite Quadrat 8: a(8) = 1.7650563928492378
Fläche Kreis 8: FK(8) = 3.112754293409349
Fläche Quadrat 8: FQ(8) = 3.115424069937963
Flächenverhältnis 8: f(8) = 0.999143045547354

Generation 9
Radius Kreis 9: r(9) = 1.076066996066257
Seite Quadrat 9: a(9) = 1.908096838181154
Fläche Kreis 9: FK(9) = 3.637713531003809
Fläche Quadrat 9: FQ(9) = 3.640833543876917
Flächenverhältnis 9: f(9) = 0.999143049844079

Generation 10
Radius Kreis 10: r(10) = 1.1632716345188872
Seite Quadrat 10: a(10) = 2.062729306181189
Fläche Kreis 10: FK(10) = 4.2512059926876145
Fläche Quadrat 10: FQ(10) = 4.254852190578728
Flächenverhältnis 10: f(10) = 0.9991430494579371

Konvergenztests des Javascripts für drei verschiedene Werte für den Radius der Konstruktionskreise x bei jeweils identischem Startpaar mit f_1 = 1.1309734.

4. Der ideale Wert für x

Der Wert für den Radius x (bzw. x_1), der die Kreise und Quadrate mit Leonardos Verfahren gegen eine tatsächliche Flächengleichheit konvergieren läßt, ist zu interessant, um nicht bestimmt zu werden. Da Leonardos Verfahren auf einer Konstruktion in unendlich vielen Schritten beruht und sich Lindemanns Beweis der Unmöglichkeit der Kreisquadratur nur auf Verfahren in endlich vielen Schritten bezieht, wäre zumindest theoretisch denkbar, daß man Leonardos Methode mit Hilfe eines kleinen Updates zu einem idealen Verfahren erweitern könnte. Hierzu müßte allerdings für den idealen Radius x, so dieser denn existiert, ein zusätzlicher Konstruktionsschritt gefunden werden, der diesen im laufenden Verfahren mit erzeugt (z.B. in dem man mit $x_1 = 0.5$ startet und die folgenden x_i Generation für Generation nach einer zu findenden Regel mit konstruiert). Schon die reine Kenntnis dieses Wertes wäre eine Herausforderung an die Anthropometrie, den tatsächlich beim Menschen zu messenden Wert für den Armradius in Bezug auf die Armspannweite zu bestimmen.

Obwohl die Konvergenz des Algorithmus selbst nicht theoretisch gezeigt werden kann, läßt sich der gesuchte Wert für x präzise bestimmen. Die dabei vollzogene Rechnung kann zugleich als exemplarisches Beispiel dafür betrachtet werden, wie sich die bereits angesprochene notwendige Bedingung beweisen läßt, daß Leonardos Folge eine Cauchy-Folge ist.

Im wesentlichen wird dabei gezeigt, daß es zu einem gewünschten Flächenverhältnis f im Zustand der Konvergenz auch ein entsprechendes x gibt, daß dieses erzeugt. Man unterstellt also für zwei aufeinander folgende im Unendlichen liegende Paare Kreis und Quadrat, daß diese das *gleiche* Flächenverhältnis f haben (da die Folge im Unendlichen ja schon auskonvergiert ist) und bestimmt aus dieser Voraussetzung das zugehörige x, so ein solches denn existiert. Dies soll nun also für $f = 1$ geschehen:

Dann ist:

$$f_i = f_{i+1} = 1 \qquad \frac{FK_i}{FQ_i} = \frac{FK_{i+1}}{FQ_{i+1}} = 1$$

Zur Vereinfachung wird a_i als 1 definiert.

$$a_i := 1$$

Daraus ergibt sich:

$$r_i = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \text{und} \quad \frac{r_{i+1}}{a_{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ .$$

Somit läßt sich der Radius des großen Kreises r_2 berechnen.

Da $a_{i+1} = \dfrac{r_{i+1}\left(r_{i+1} + m_i\right)}{m_i}$ ist und $\dfrac{a_{i+1}}{r_{i+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ ist, folgt:

$$\sqrt{\pi} = \frac{r_{i+1}}{m_i} + 1\ .$$

Mit $m_i = \sqrt{r_{i+1}^{\,2} + 1/4 \cdot a_1^{\,2}}$ erhält man

$$\sqrt{\pi} - 1 = \frac{r_{i+1}}{\sqrt{r_{i+1}^{\,2} + 1/4}} \quad \text{und somit} \quad r_{i+1} = \frac{\sqrt{\pi} - 1}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{\pi} - \pi}}\ .$$

Da $\dfrac{r_{i+1}}{a_{i+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ ist, ist $a_{i+1} = \sqrt{\pi} \cdot r_{i+1}$ und somit

$$a_{i+1} = \frac{\pi - \sqrt{\pi}}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{\pi} - \pi}}$$ die Kantenlänge von Q_{i+1}.

Aufgrund von $r_{i+1} = \dfrac{a_i^{\,2} + k_i^{\,2}}{2 \cdot a_i}$ und $a_i = 1$ ist

$$k_i = \sqrt{\frac{\sqrt{\pi} - 1}{\sqrt{2 \cdot \sqrt{\pi} - \pi}} - 1}\ .$$

Aufgrund von $h_i = r_i + \sqrt{r_i^{\,2} - 1/4 \cdot a_1^{\,2}}$ und $a_i = 1$ ist

$$h_i = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\frac{1}{\pi} - 1/4}\ .$$

Da $k_i = \frac{1}{2} \cdot a_i - x_i + k'_i$ und $a_i = 1$ ist

a) $k'_i = k_i + x_i - \frac{1}{2}$.

Ferner ist $k'_i = \sqrt{x_i^2 - (a_i - h_i)^2}$ bzw.

b) $k'_i = \sqrt{x_i^2 - (1 - h_i)^2}$

Durch Gleichsetzen von a) und b) erhält man nun eine Gleichung für das gesuchte ideale *x*:

$$\sqrt{x_i^2 - (1 - h_i)^2} = k_i + x_i - \frac{1}{2} .$$

Durch Quadrieren, Ausmultiplizieren und Umformen ergibt sich:

$$x_i = \frac{(1 - h_i)^2}{1 - 2 \cdot k_i} + \frac{\frac{1}{2} - k_i}{2}$$

Durch Einsetzen der Terme für h_i und k_i läßt sich x_i nun bestimmen:

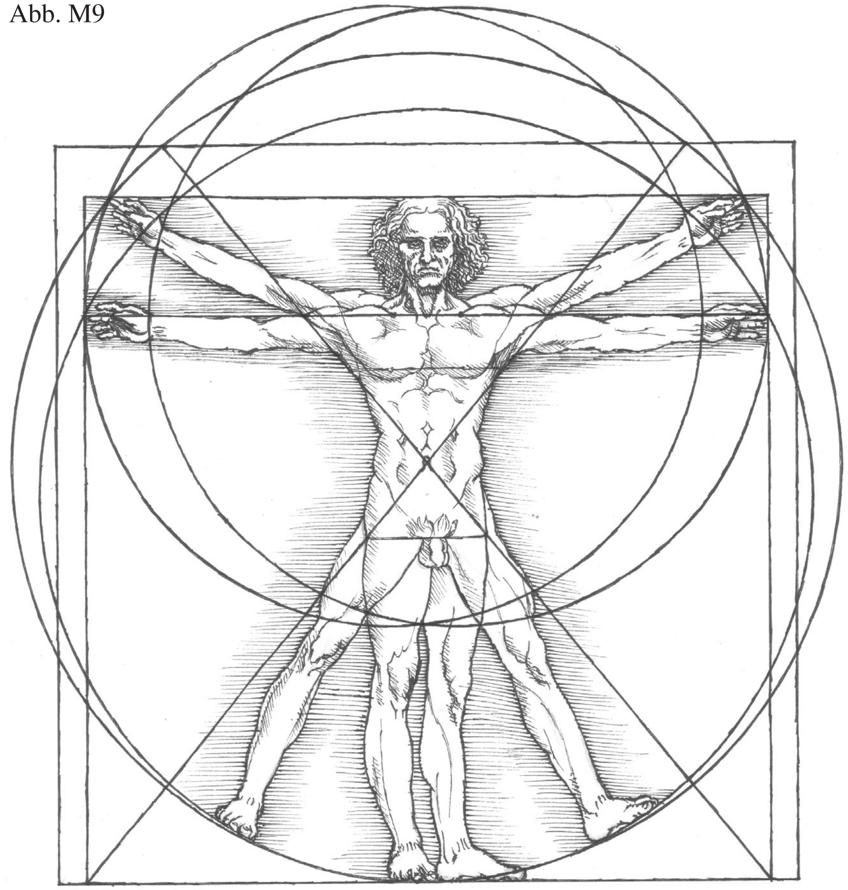
$$x_i = \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \sqrt{\frac{1}{\pi} - 1/4}\right)^2}{1 - 2 \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{\pi} - 1}{\sqrt{2 \cdot \sqrt{\pi} - \pi}} - 1}} + \frac{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{\pi} - 1}{\sqrt{2 \cdot \sqrt{\pi} - \pi}} - 1}}{2}$$

(Die hier und im gesamten mathematischen Anhang zu sehenden Gleichungen wurden mit freundlicher Genehmigung der Mathematikplattform www.matheplanet.com mit deren Formeleditor *Optimath fed geo* gesetzt.)
Für das zu erzielende Flächenverhältnis $f = 1$ existiert also genau ein mögliches x, daß wir nun kennen. Der Wert ist ein Ausdruck in Abhängigkeit von π. Numerisch entspricht der ausgesprochen sperrige Term etwa 0.4535605. Setzt man diesen Wert in das Javascript ein, erhält man etwa 0.99999997 als resultierendes Flächenverhältnis. Die geringfügige Abweichung zu 1 ist aber ausschließlich auf die erwähnten Ungenauigkeiten zurückzuführen, wie man u.a. durch die gerade vollzogene Berechnung sieht.

Wie eng der von Leonardo unterstellte Wert für den Armradius von 0.436 am Ideal lag, illustriert am besten die folgende Zeichnung. Dort wurden sämtliche

geometrischen Objekte der Konstruktion und in der Folge (fast) alle Körperproportionen im Sinne einer idealen Quadratur angepaßt. Die Änderungen in den Proportionen im Vergleich zu Leonardos Blatt fallen kaum auf und nach wie vor wirkt die Figur ausgesprochen natürlich.

Abb. M9



Tuschezeichnung nach der *Proportionsstudie* von Leonardo mit angepaßten Proportionen auf Basis eines im Sinne der Kreisquadratur idealen Wertes für den Radius der Armbewegung.